PART3　相加平均と相乗平均

3　[1]　$a>0$，$b>0$，$a \neq b$ のとき $\dfrac{a+b}{2}$，$\sqrt{ab}$，$\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$ の大小を比較せよ。

[2]　$x>0$ のとき，$x+\dfrac{4}{x+1}$ の最小値を求めよ。

Point Pickup

[1]　相加平均と相乗平均の大小関係

$$a>0,\ b>0 \text{ のとき } \frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab} \quad (\text{等号成立は } a=b \text{ のとき})$$

大小比較をする値が文字で表されている場合は，文字に適当な値を入れることで大小を予測してから証明するとよい。

[2]　相加平均と相乗平均の大小関係より，$a>0$，$b>0$ のとき $a+b \geqq 2\sqrt{ab}$ であるから，右辺 $2\sqrt{ab}$ が定数となり，かつ等号が成立するような a，b の値が存在すれば，$a+b$ の最小値は $2\sqrt{ab}$ である。

第 2 講　PART3　確認問題

1　$a>0$，$b>0$，$a \fallingdotseq b$ のとき

$$a+b,\ \sqrt{ab},\ \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

の大小を比較せよ。

ア ＜ イ ＜ ウ

①　$a+b$　　②　$\sqrt{ab}$　　③　$\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$

2　$x>1$ のとき，$x-10+\dfrac{9}{x-1}$ の最小値を求めよ。

$x=$ エ のとき　最小値 オカ

PART3　相加平均と相乗平均

3　[1]　$a>0$，$b>0$，$a \neq b$ のとき　$\dfrac{a+b}{2}$，$\sqrt{ab}$，$\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$ の大小を比較せよ。

[2]　$x>0$ のとき，$x+\dfrac{4}{x+1}$ の最小値を求めよ。

[1]　$a>0$，$b>0$ のとき，$\dfrac{a+b}{2}$ と $\sqrt{ab}$ の平方の差をとると

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-(\sqrt{ab})^2=\frac{a^2+2ab+b^2}{4}-ab=\frac{a^2-2ab+b^2}{4}=\frac{(a-b)^2}{4}>0 \quad (\because\ a \neq b)$$

よって　$\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2>(\sqrt{ab})^2$

$\dfrac{a+b}{2}>0$，$\sqrt{ab}>0$ であるから　$\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$ ……①

$$\frac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}=\frac{2}{\dfrac{a+b}{ab}}=\frac{2ab}{a+b}$$

$a>0$，$b>0$ のとき，$\sqrt{ab}$ と $\dfrac{2ab}{a+b}$ の平方の差をとると

$$(\sqrt{ab})^2-\left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2=\frac{ab(a+b)^2-4a^2b^2}{(a+b)^2}=\frac{ab\{(a+b)^2-4ab\}}{(a+b)^2}$$

$$=\frac{ab(a-b)^2}{(a+b)^2}>0 \quad (\because\ a \neq b)$$

よって　$(\sqrt{ab})^2>\left(\dfrac{2ab}{a+b}\right)^2$

$\sqrt{ab}>0$，$\dfrac{2ab}{a+b}>0$ であるから　$\sqrt{ab}>\dfrac{2ab}{a+b}$

すなわち　$\sqrt{ab}>\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$ ……②

①，②より　$\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}<\sqrt{ab}<\dfrac{a+b}{2}$

［2］

$$x+\frac{4}{x+1}=x+1+\frac{4}{x+1}-1$$

$x>0$ より $x+1>0$

よって，（相加平均）≧（相乗平均）から

$$x+1+\frac{4}{x+1}-1\geqq 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{4}{x+1}}-1=4-1=3$$

等号成立は　$x+1=\dfrac{4}{x+1}$ のとき

このとき　$(x+1)^2=4$　　$x+1>0$ より　$x+1=2$ すなわち　$x=1$

したがって，求める最小値は 3 （$x=1$ のとき）

第 2 講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] ア：②，イ：③，ウ：①

[解説]

$a>0$，$b>0$ のとき，$a+b$ と $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ の平方の差をとると [A]

$$(a+b)^2-\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^2$$

$$=a^2+2ab+b^2-\frac{a^2+b^2}{2}$$

$$=\frac{a^2+4ab+b^2}{2}>0 \quad (\because a>0,\ b>0)$$

よって　$(a+b)^2>\left(\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\right)^2$

$a+b>0$，$\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}>0$ であるから

$$a+b>\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \quad \cdots\cdots(*)$$

また $a^2>0$，$b^2>0$ より，$a \neq b$ と

（相加平均）≧（相乗平均）から

$$\frac{a^2+b^2}{2}>\sqrt{a^2\cdot b^2}=ab \quad (\because ab>0)$$ [B]

$\dfrac{a^2+b^2}{2}>0$，$ab>0$ であるから

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}>\sqrt{ab} \quad \cdots\cdots(**)$$

$(*)$，$(**)$より

$$\boldsymbol{\sqrt{ab}<\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}<a+b}$$

> [A]　式の大小比較をする問題では，適当な値を代入し，大小を予測してから証明するとよい（例えば，$a=1$，$b=2$ をそれぞれ代入する）。

> [B]　相加平均と相乗平均の大小関係
> $a>0$，$b>0$ のとき
> $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$
> 等号が成り立つのは，$a=b$ のとき。

2 **[正解]** エ：4，オカ：−3

[解説]

$$x-10+\frac{9}{x-1}=x-1+\frac{9}{x-1}-9$$

$x>1$ より　$x-1>0$

よって，（相加平均）≧（相乗平均）から

$$x-1+\frac{9}{x-1}-9\geqq 2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{9}{x-1}}-9$$ [B]

$$=2\cdot 3-9=-3$$ [C]

等号が成り立つのは，$x-1=\dfrac{9}{x-1}$ のときである。

このとき　$(x-1)^2=9$

$x-1>0$ より　$x-1=3$　すなわち　$x=4$

よって，$x=4$ のとき最小値 **−3** をとる。

[C]　相加平均と相乗平均の大小関係から　$a+b\geqq 2\sqrt{ab}$
右辺 $2\sqrt{ab}$ が定数となり，かつ等号が成り立つような a，b の値が存在するなら，$a+b$ の最小値は $2\sqrt{ab}$ である。